



Prof. Dr. Rupert Frank
Leonard Wetzell

ANALYSIS EINER VARIABLEN
ÜBUNGSBLATT 9 - LÖSUNGEN

WS 2021/22
27. Dezember 2021

Aufgabe 1 (10 Punkte). Sei $a > 0$. Die Folgen $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ und $(y_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ seien rekursiv definiert durch $x_0 := a$ und

$$x_{n+1} := \sqrt{x_n}, \quad y_n := 2^n(x_n - 1)$$

für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Zeigen Sie: $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \ln a$.

Hinweis: Probieren Sie, eine explizite, nicht-rekursive Darstellung für $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ in Abhängigkeit von a zu finden.

Lösung. Mit einer simplen Induktion zeigt man

$$x_n = a^{2^{-n}}$$

für alle $n \in \mathbb{N}_0$ (machen Sie die Induktion!). Damit ist

$$y_n = 2^n(a^{2^{-n}} - 1) = \frac{e^{2^{-n} \ln a} - 1}{2^{-n}} = \frac{e^{h_n} - 1}{h_n} \ln a,$$

wobei $h_n = 2^{-n} \ln a$. Aus der Vorlesung wissen wir $\lim_{x \rightarrow 0} (e^x - 1)/x = 1$, also ist wegen $\lim_{n \rightarrow \infty} h_n = 0$ insbesondere

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{h_n} - 1}{h_n} = 1.$$

Das bedeutet aber $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \ln a$, wie gewünscht. □

Aufgabe 2 (10 Punkte). Sei $a \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie: Die Gleichung

$$z^2 + 2az + 1 = 0$$

hat genau dann keine reellen Lösungen, wenn $|a| < 1$. In diesem Fall hat die Gleichung zwei komplex konjugierte Lösungen, die auf dem Einheitskreis $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ liegen.

Lösung. Wir ergänzen quadratisch und erhalten

$$(z + a)^2 = a^2 - 1. \tag{1}$$

Wir beweisen nun

$$|a| \geq 1 \Leftrightarrow \text{Gleichung (1) besitzt eine Lösung } \xi \in \mathbb{R}.$$

“ $\Rightarrow$ ”: Ist $|a| \geq 1$, so ist $a^2 - 1 \geq 0$ und $\xi_{\pm} := -a \pm \sqrt{a^2 - 1}$ sind wohldefinierte reelle Zahlen, die Gleichung (1) lösen.

“ $\Leftarrow$ ”: Angenommen, $\xi \in \mathbb{R}$ ist eine Lösung der Gleichung (1), d.h.

$$(\xi + a)^2 = a^2 - 1.$$

Wegen $(\xi + a)^2 \geq 0$ impliziert das $a^2 \geq 1$ oder $|a| \geq 1$.

Für den Fall, dass es keine reelle Lösung gibt bzw. $|a| < 1$ gilt, setze

$$\xi_1 := -a + i\sqrt{1-a^2}, \quad \xi_2 := \bar{\xi}_1.$$

Dann sind ξ_1, ξ_2 zueinander komplex konjugierte Lösungen von (1) und es gilt

$$|\xi_1|^2 = |\xi_2|^2 = (-a)^2 + (\sqrt{1-a^2})^2 = a^2 + 1 - a^2 = 1,$$

also liegen ξ_1 und ξ_2 auf dem Einheitskreis, wie gewünscht. $\square$

Definition (Hyperbelfunktionen). Die Funktionen $\cosh: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ (*Cosinus hyperbolicus*) und $\sinh: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ (*Sinus hyperbolicus*) sind definiert durch

$$\cosh z := \frac{1}{2}(e^z + e^{-z}), \quad \sinh z := \frac{1}{2}(e^z - e^{-z}).$$

Aufgabe 3 (2 + 4 + 4 Punkte). Zeigen Sie:

- (i) $\cosh^2(z) - \sinh^2(z) = 1$ für alle $z \in \mathbb{C}$.
- (ii) Die Funktion $\sinh$ bildet $\mathbb{R}$ bijektiv auf $\mathbb{R}$ ab, die Funktion $\cosh$ bildet $[0, \infty[$ bijektiv auf $[1, \infty[$ ab.

Hinweis: Zeigen Sie, dass die Funktionen auf den entsprechenden Mengen streng monoton sind und nutzen Sie dann ein Resultat aus der Vorlesung.

- (iii) Für die Umkehrfunktionen

$$\operatorname{arsinh} := \sinh^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \operatorname{arcosh} := \cosh^{-1}: [1, \infty[\rightarrow [0, \infty[$$

(*Areasinus hyperbolicus* und *Areacosinus hyperbolicus*) gelten die Identitäten

$$\operatorname{arsinh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}), \quad \operatorname{arcosh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}).$$

Hinweis: Machen Sie den Ansatz

$$x = \sinh y$$

und substituieren Sie $u := e^y$.

Lösung. (i) Folgt aus einer simplen Rechnung.

- (ii) Wir zeigen zunächst, dass $\sinh$ und $\cosh$ auf den entsprechenden Mengen streng monoton wachsend sind.

Zu $\sinh$: Seien $x, y \in \mathbb{R}$ mit $x < y$. Dann ist $e^x < e^y$ und $-e^{-x} < -e^{-y}$, also auch

$$\sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) < \frac{1}{2}(e^y - e^{-y}) < \sinh y.$$

Zu cosh: Seien $x, y \in [0, \infty[$ mit $x < y$. Dann ist $e^{-x-y} < e^0 = 1$, also

$$\cosh y - \cosh x = \frac{1}{2}(e^y - e^x + e^{-y} + e^{-x}) = \frac{1}{2}(e^y - e^x)(1 - e^{-x-y}) > 0.$$

Sei $R > 0$. Nach einem Satz der Vorlesung bildet $\sinh$ das Intervall $[-R, R]$ bijektiv auf das Intervall $[-\sinh R, \sinh R]$ ab. Da $\lim_{x \rightarrow \infty} \sinh x = \infty$ und $R > 0$ beliebig war, folgt, dass $\sinh$ ganz $\mathbb{R}$ bijektiv auf $\mathbb{R}$ abbildet. Analog zeigt man die Behauptung für $\cosh$.

(iii) Sei $y \in \mathbb{R}$ und $x \in \mathbb{R}$ mit $\sinh x = y$, d.h. $e^y - e^{-y} = 2x$. Mit der im Hinweis angegebenen Substitution $u := e^y > 0$ folgt

$$u - \frac{1}{u} = 2x \Leftrightarrow u^2 - 2xu - 1 = 0.$$

Diese quadratische Gleichung hat die Lösungen

$$u = x + \sqrt{x^2 + 1} \quad \text{und} \quad u = x - \sqrt{x^2 + 1},$$

wobei wir zweite wegen $u > 0$ ausschließen können. Es folgt

$$\operatorname{arsinh} x = y = \ln u = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}),$$

wie gewünscht. Für den $\cosh$ geht man wieder analog vor.

Bemerkung: Alternativ kann man auch ausgehend von den Formeln für arsinh und arcosh aus Aufgabenteil (iii) direkt verifizieren, dass diese

$$\operatorname{arsinh} \circ \sinh = \operatorname{id}_{\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}} \quad \text{und} \quad \sinh \circ \operatorname{arsinh} = \operatorname{id}_{\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}}$$

sowie

$$\operatorname{arcosh} \circ \cosh = \operatorname{id}_{[0, \infty[\rightarrow [0, \infty[} \quad \text{und} \quad \cosh \circ \operatorname{arcosh} = \operatorname{id}_{[1, \infty[\rightarrow [1, \infty[}$$

erfüllen, woraus dann automatisch folgt, dass $\sinh^{-1} = \operatorname{arsinh}$ und $\cosh^{-1} = \operatorname{arcosh}$. Aufgabenteil (ii) kann man sich dann sparen, denn Bijektivität ist äquivalent zur Existenz einer Umkehrfunktion. $\square$